

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Є.О. Севостьянов (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

E.A. Sevost'yanov (Zhitomir State University of I. Franko)

О нульмерности предела последовательности отображений, удовлетворяющих одному модульному неравенству

Про нульвимірність границі послідовності відображень, що задовольняють одну модульну нерівність

On the lightness of the limit of sequence of mappings satisfying some modular inequality

Статья посвящена изучению свойств одного класса пространственных отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением. Показано, что локально равномерный предел последовательности отображений $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющих одному неравенству относительно p -модуля семейств кривых, является нульмерным. Указанное утверждение обобщает известную теорему об открытости и дискретности равномерного предела последовательности отображений с ограниченным искажением.

Статтю присвячено вивченню властивостей одного класу просторових відображень більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням. Доведено, що локально рівномірною границею послідовності відображень $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, які задовольняють одну нерівність відносно p -модуля сімей кривих, є нульвимірним. Вказане твердження узагальнює відому теорему про відкритість і дискретність рівномірної границі послідовності відображень з обмеженим спотворенням.

A paper is devoted to study of one class of space mappings which are more general than mappings with bounded distortion. It is showed that a locally uniformly limit of a sequence of mappings $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ of domain $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, satisfying one inequality with respect to p -modulus of families of curves, is light. The above statement is a generalization of well-known theorem about openness and discreteness of uniformly limit of a sequence of mappings with bounded distortion.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена изучению отображений с ограниченным и конечным искажением, активно изучаемых в последнее время (см., напр., [1]–[13]). Здесь же хотелось бы указать на работы, связанные с классами Соболева и пространствами Карно–Каратеодори новосибирской школы математиков (см. [14]–[21]).

Напомним некоторые определения. Всюду далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m – мера Лебега \mathbb{R}^n , запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. Как обычно, мы пишем $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в D в степени n . Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n . Напомним, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

1) $f \in W_{loc}^{1,n}$, 2) якобиан $J(x, f)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак почти всюду в D , 3) $\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$ и некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n: |h|=1} |f'(x)h|$, см., напр., [7, § 3, гл. I], либо [10, определение

2.1, разд. 2, гл. I]. Начало интенсивных исследований пространственных отображений с ограниченным искажением положено Ю. Г. Решетняком. В его работах, в частности, доказаны открытость и дискретность отображений f с ограниченным искажением, см. [7, теоремы 6.3 и 6.4, § 6, гл. II].

Обратим внимание на следующий результат, также принадлежащий Решетняку: *если последовательность f_m отображений с ограниченным искажением, имеющая общую постоянную квазиконформности $K \geq 1$, сходится локально равномерно к отображению f , то f является отображением с ограниченным искажением, в частности, f открыто и дискретно* (см. [7]). В настоящей статье указанный результат в несколько модифицированном варианте доказывается нами для более широкого класса отображений. Для формулировки этого результата рассмотрим ряд дополнительных определений, связанных с геометрическим истолкованием отображений с ограниченным искажением.

Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (либо открытого интервала (a, b) , а также полуоткрытых интервалов вида $[a, b)$, $(a, b]$) в \mathbb{R}^n , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, напр., в [13, разд. 1–6]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} \rho(x) |dx|$

удовлетворяет условию $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем:

$\rho \in \text{adm } \Gamma$. Пусть $p \geq 1$, тогда p – *модулем* семейства кривых Γ называется величина $M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорировано* семейством Γ_2 , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . В этом случае,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2) \quad (1)$$

(см. [13, теорема 6.4, гл. I]).

В относительно недавней работе [22] установлена открытость и дискретность отображений f области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в \mathbb{R}^n , удовлетворяющих для произвольной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$ оценке вида

$$M(\Gamma) \leq \int_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^n(y) dm(y) \quad (2)$$

относительно конформного модуля семейств кривых $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$ и некоторой заданной функции $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus f(D)$. В настоящей работе мы покажем, что локально равномерным пределом отображений, удовлетворяющих оценке вида (2), может быть только нульмерное или постоянное отображение. Заметим, при этом, что отображения с ограниченным искажением $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяют неравенству (2), поскольку для них всегда

$$M(\Gamma) \leq N(f, A) \cdot K \cdot M(f(\Gamma)), \quad (3)$$

где

$$N(y, f, A) = \text{card } \{x \in A \mid f(x) = y\}, \quad N(f, A) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, A),$$

A – произвольное борелевское множество в D , а $K \geq 1$ – некоторая постоянная, которая может быть вычислена как $K = \text{ess sup } K_O(x, f)$, $K_O(x, f) = \|f'(x)\|^n / J(x, f)$ при $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$ при $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ при $f'(x) \neq 0$, но $J(x, f) = 0$ (см. [10, теорема 6.7, гл. II]). Таким образом, основной результат данной заметки, сформулированный ниже, есть некая модификация результата Решетняка о пределе последовательности отображений с ограниченным искажением, соответствующая случаю, когда $Q(y)$ ограничено в (2).

Теперь приведём ещё некоторые вспомогательные сведения. Множество $H \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, будем называть *всюду разрывным*, если любая его компонента связности вырождается в точку; в этом случае пишем $\dim H = 0$, где \dim обозначает *топологическую размерность* множества H , см. [23]. Отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *нульмерным*, если $\dim \{f^{-1}(y)\} = 0$ для каждого $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0, r)$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) dS, \quad (4)$$

где dS – элемент площади поверхности S . Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$ (см., напр., [5, разд. 6.1]). Заметим, что все ограниченные функции φ – конечного среднего колебания. Для точки $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и чисел $0 < r_1 < r_2 < \infty$ обозначим

$$A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}. \quad (5)$$

Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданное отображение, то для фиксированного $y_0 \in f(D)$ и произвольных $0 < r_1 < r_2 < \infty$ обозначим через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ семейство всех кривых γ в области D таких, что $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Рассмотрим вместо (2) неравенство

$$M_p(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{f(D)} Q(y) \cdot \eta^p(y) dm(y) \quad (6)$$

выполненное для любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (7)$$

Отметим, что даже при $p = n$ неравенство (6) является более слабым, чем (2). Действительно, если для произвольной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$ имеет место неравенство (2), то возьмём произвольную измеримую по Лебегу функцию $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющую соотношению (7) и определим функцию $\rho_*(y) := \eta(|y - y_0|)$. Эта функция допустима для семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$, соединяющих сферы $S_1 = S(y_0, r_1)$ и $S_2 = S(y_0, r_2)$, поскольку согласно [13, теорема 5.7] интеграл от произвольной радиальной функции $\Psi(|y - y_0|)$ по (локально спрямляемой) кривой, соединяющей сферы $S(y_0, r_1)$ и $S(y_0, r_2)$ не меньше, чем соответствующий интеграл по отрезку (r_1, r_2) от функции $\Psi(t)$ и, значит, $\int_{\gamma} \rho_*(y) |dy| \geq \int_{r_1}^{r_2} \eta(t) dt \geq 1$ для произвольной кривой $\gamma \in \Gamma(S_1, S_2, A)$. Значит, определённую выше функцию ρ_* можно подставить в соотношение (2), откуда и следует справедливость неравенства (6).

Основной результат настоящей статьи включает в себе следующая

Теорема 1. Пусть $p \in [n - 1, n]$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция, $f_m : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – последовательность отображений, удовлетворяющих (6)–(7), и сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть функция $Q(y)$, кроме того, удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

- 1) $Q \in FMO(y_0)$ в произвольной точке $y_0 \in f(D)$,
- 2) $q_{y_0}(r) = O\left([\log \frac{1}{r}]^{n-1}\right)$ при $r \rightarrow 0$ и при всех $y_0 \in f(D)$, где функция $q_{y_0}(r)$ определена равенством (4),
- 3) для каждого $y_0 \in f(D)$ найдётся некоторое число $\delta(y_0) > 0$, такое что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty, \quad \int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty. \quad (8)$$

Тогда отображение f либо нульмерно, либо постоянно в D .

Если, кроме того, отображение f сохраняет ориентацию, то f открыто и дискретно.

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Для проведения доказательств основных результатов нам необходимы некоторые сведения из теории общих метрических пространств. Напомним, что связный компакт C метрического пространства X называется *континуумом*. Пусть (X, μ) – метрическое пространство с мерой μ . Определим *функцию Лёвнера* $\phi_n : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ на X по следующему правилу:

$$\phi_n(t) = \inf \{M_n(\Gamma(E, F, X)) : \Delta(E, F) \leq t\},$$

где \inf берётся по всем произвольным невырожденным непересекающимся континуумам E, F в X , относительно которых величина $\Delta(E, F)$ определяется как

$$\Delta(E, F) := \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}.$$

Пространство X называется *пространством Лёвнера*, если функция $\phi_n(t)$ положительна при всех положительных значениях t (см. [5, разд. 2.5] либо [24, гл. 8]). Заметим, что пространство \mathbb{R}^n , равно как и единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, являются пространствами Лёвнера относительно стандартной евклидовой метрики и стандартной лебеговой меры (см. [24, теорема 8.2 и пример 8.24(a)]). Заметим, что в пространствах Лёвнера X условие $\mu(B(x_0, r)) \geq C \cdot r^n$ выполняется для каждой точки $x_0 \in X$, некоторой постоянной C и всех $r < \text{diam } X$. Пространство X будет называться *геодезическим*, если любые две его точки могут быть соединены кривой, длина которой равна расстоянию между указанными точками. В частности, \mathbb{B}^n – геодезическое пространство. Следующее определение см., напр., в [24, разд. 1.4, гл. I], либо [25, раздел 1]). Говорят, что метрическое пространство (X, ρ) с мерой μ является *пространством с условием удвоения меры*, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $r > 0$ и всех $x_0 \in X$ выполняется следующее условие: $\mu(B(x_0, 2r)) \leq C \cdot \mu(B(x_0, r))$. Легко видеть, что произвольная ограниченная евклидова область D удовлетворяет условию удвоения меры. Следуя [24, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ , соединяющих точки x и $y \in X$, выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} \rho |dx|$, где, как обычно, $\int_{\gamma} \rho |dx|$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ . Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$ -*неравенство Пуанкаре*, если найдётся постоянная $C \geq 1$ такая, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ и любого её верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| d\mu(x) \leq C \cdot (\text{diam } B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Метрическое пространство (X, d, μ) назовём *n -регулярным по Альфорсу*, если при каждом $x_0 \in X$, некоторой постоянной $C \geq 1$ и всех $R < \text{diam } X$

$$\frac{1}{C} R^n \leq \mu(B(x_0, R)) \leq C R^n.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Единичный шар \mathbb{B}^n является n -регулярным по Альфорсу метрическим пространством, в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре. Более того, для любых двух континуумов $E, F \subset \mathbb{B}^n$ и произвольного $p \in [n - 1, n]$

$$M_p(\Gamma(E, F, \mathbb{B}^n)) > 0. \quad (9)$$

Доказательство. То, что \mathbb{B}^n является n -регулярным по Альфорсу, непосредственно следует из сделанных выше замечаний. Согласно этим же замечаниям пространство \mathbb{B}^n является геодезическим, и является пространством Лёвнера, поэтому в нём выполняется $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре (см. [24, теоремы 9.8 и 9.5]). Соотношение (9), в таком случае, есть результат [25, следствие 4.8]. \square

Следующая лемма включает в себя основной результат настоящей работы в наиболее общей ситуации.

Лемма 1. Пусть $p \in [n - 1, n]$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция, $f_m : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – последовательность отображений, удовлетворяющих оценкам (6)–(7) и сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Далее, предположим, что для каждого $y_0 \in D$ найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого выполнено соотношение

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^p(|y - y_0|) \, dm(y) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)) \quad (10)$$

для некоторой борелевской функции $\psi(t) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, такой что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad (11)$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где

$$A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |y - y_0| < \varepsilon_0\}.$$

Тогда отображение f либо постоянно, либо нульмерно.

Если, кроме того, отображение f сохраняет ориентацию, то f открыто и дискретно.

Замечание 1. В условиях леммы 1, можно считать, что для произвольного фиксированного A , такого что $0 < A < \varepsilon_0$, и всех $\varepsilon \in (0, A)$, выполняется условие вида $\int_{\varepsilon}^A \psi(t) dt > 0$. Действительно, из того, что $Q(x) > 0$ п.в., а также соотношений (10) и (11) следует, что $\int_{\varepsilon}^A \psi(t) dt \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (10) увеличивается при уменьшении ε .

Доказательство леммы 1. Если $f \equiv \text{const}$, доказывать нечего. Пусть $f \not\equiv \text{const}$. Предположим противное, а именно, f не является нульмерным отображением. Тогда найдётся $y_0 \in \mathbb{R}^n$, такое что множество $\{f^{-1}(y_0)\}$ содержит невырожденный континуум

$C \subset \{f^{-1}(y_0)\}$. Поскольку по предположению $f \neq y_0$, найдётся точка a , принадлежащая этому континууму, в любой окрестности U которой имеются точки, ему не принадлежащие. Можно считать, что $U = \mathbb{B}^n$ и $x_0 \in \mathbb{B}^n : f(x_0) \neq y_0$. По теореме о сохранении знака найдётся $x_0 \in \mathbb{B}^n$ и $\delta_0 > 0 : \overline{B(x_0, \delta_0)} \subset \mathbb{B}^n$ и

$$f(x) \neq y_0 \quad \forall \quad x \in \overline{B(x_0, \delta_0)}. \quad (12)$$

В силу [26, лемма 1.15] при $p = n$ и предложения 1 при $p \in [n - 1, n)$ будем иметь

$$M_p \left(\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) \right) > 0. \quad (13)$$

Зафиксируем достаточно большое $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим семейство кривых

$$f_m \left(\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) \right).$$

Заметим, что в силу локально равномерной сходимости f_m к f может быть построена подпоследовательность f_{m_k} такая, что $|f_{m_k}(x) - y_0| < 1/2^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in C$. С другой стороны, $f(\overline{B(x_0, \delta_0)})$ – компакт в \mathbb{R}^n , поэтому $\text{dist}(y_0, f(\overline{B(x_0, \delta_0)})) \geq \sigma_0 > 0$. Поскольку f_m сходится к f локально равномерно,

$$|f_m(x) - y_0| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - y_0| \geq |f(x) - y_0| - |f_m(x) - f(x)| \geq \sigma_0/2$$

при всех $x \in \overline{B(x_0, \delta_0)}$ и всех $m \geq m_0$.

В таком случае, каждая кривая $\gamma \in f_{m_k} \left(\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) \right)$ имеет подкривую $\gamma' \in \Gamma(S(y_0, 1/2^k), S(y_0, \sigma_0/2), A(y_0, 1/2^k, \sigma_0/2))$ при достаточно больших $k \geq k_0$ (см. [5, предложение 13.3]). Отсюда $\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) > \Gamma_{f_{m_k}}(y_0, 1/2^k, \sigma_0/2)$ и, значит, в силу (1)

$$M_p \left(\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) \right) \leq M_p(\Gamma_{f_{m_k}}(y_0, 1/2^k, \sigma_0/2)). \quad (14)$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\eta_k(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(1/2^k, \sigma_0/2), & t \in [1/2^k, \sigma_0/2], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [1/2^k, \sigma_0/2], \end{cases}$$

где $I(1/2^k, \sigma_0/2) = \int_{1/2^k}^{\sigma_0/2} \psi(t)dt$. Заметим, что функция η_k удовлетворяет условию вида (7) при $r_1 = 1/2^k$ и $r_2 = \sigma_0/2$. Тогда согласно неравенствам (6) и (14) мы получаем, что

$$\begin{aligned} M_p \left(\Gamma \left(C, \overline{B(x_0, \delta_0)}, \mathbb{B}^n \right) \right) &\leq \frac{1}{I^p(1/2^k, \sigma_0/2)} \int_{A(y_0, 1/2^k, \sigma_0/2)} Q(y) \psi^p(|y - y_0|) dm(y) \leq \quad (15) \\ &\leq \frac{C}{I^p(1/2^k, \varepsilon_0)} \int_{A(y_0, 1/2^k, \sigma_0/2)} Q(y) \psi^p(|y - y_0|) dm(y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Однако, соотношение (15) противоречит неравенству (13). Полученное противоречие говорит о том, что отображение f нульмерно.

Пусть дополнительно известно, что f сохраняет ориентацию. Тогда открытость и дискретность отображения f вытекает из [27, следствие, с. 333] \square

3. О доказательстве основного результата. Доказательство теоремы 1 непосредственно вытекает из леммы 1 и следующих соображений. В случае 1), когда $Q \in FMO(y_0)$, необходимо рассмотреть функцию $\psi(t) = (t \log \frac{1}{t})^{-n/p} > 0$ и применить к ней утверждение леммы 1. Тогда, ввиду [5, следствие 6.3, гл. 6], условие $Q \in FMO(y_0)$ влечёт, что при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_{\varepsilon < |y-y_0| < \varepsilon_0} Q(y) \cdot \psi^p(|y-y_0|) dm(y) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Заметим, что величина $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, определённая в лемме 1, может быть оценена следующим образом:

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt > \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}. \quad (17)$$

В таком случае, из условия (16) следует, что

$$\frac{1}{I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |y-y_0| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^p(|y-y_0|) dm(y) \leq C \left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-p} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что и завершает доказательство теоремы в случае 1), поскольку здесь выполнены условия (10)–(11) леммы 1. Заметим, что случай 2) является частным случаем ситуации 3), поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть только случай 3). В этом случае полагаем

$$I = I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \quad (18)$$

Для произвольных $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$ рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)] , & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0) , \\ 0 , & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0) . \end{cases} \quad (19)$$

Заметим, что функция ψ удовлетворяет всем условиям леммы 1. По теореме Фубини (см. [28, теорема 8.1, гл. III]) имеем $\int_{\varepsilon < |y-y_0| < \varepsilon_0} Q(y) \cdot \psi^p(|y-y_0|) dm(y) = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ (где ω_{n-1} – площадь единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n). Вывод: выполнены условия (10)–(11) леммы 1, что окончательно и доказывает теорему. \square

4. Основные следствия. Из леммы 1 получаем также следующие утверждения.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 отображение f является нульмерным либо постоянным, если в каждой точке $y_0 \in f(D)$ при некотором $\delta_0 = \delta_0(y_0)$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено условие $\int_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{n-1}{p-1}}(t)} < \infty$ и, кроме того, $\int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{n-1}{p-1}}(t)} = \infty$.

Доказательство. Аналогично доказательству пункту 3) теоремы 1 рассмотрим функцию $\psi(t)$ =
$$\begin{cases} \left(1/[tq_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\right)^{n/p}, & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$
 Рассуждая также, как в указанном случае, получаем требуемое утверждение. \square

Отдельно рассмотрим случай $p \in [n-1, n)$.

Следствие 2. Пусть $p \in [n-1, n)$, тогда в условиях теоремы 1 отображение f является нульмерным либо постоянным, если функция Q удовлетворяет условию $Q \in L_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \geq \frac{n}{n-p}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом $0 < \varepsilon_0 < \infty$ и для произвольного $y_0 \in f(D)$ положим $G := B(y_0, \varepsilon_0)$ и $\psi(t) := 1/t$. Заметим, что указанная функция ψ удовлетворяет неравенствам (11), так что остаётся проверить лишь справедливость условия (10). Применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^p} dm(x) \leq \\ & \leq \left(\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{pq}} dm(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_G Q^{q'}(x) dm(x) \right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Заметим, что первый интеграл в правой части неравенства (20) может быть подсчитан непосредственно. Действительно, пусть для начала $q' = \frac{n}{n-p}$ (и, следовательно, $q = \frac{n}{p}$.) Ввиду теоремы Фубини будем иметь:

$$\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{pq}} dm(x) = \omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t} = \omega_{n-1} \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

В обозначениях леммы 1 мы будем иметь, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^p} dm(x) \leq \omega_{n-1}^{\frac{n}{p}} \|Q\|_{L^{\frac{n}{n-p}}(G)} \left(\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-p+\frac{p}{n}} \rightarrow 0,$$

что влечёт выполнение соотношения (10).

Пусть теперь $q' > \frac{n}{n-p}$ (т.е., $q = \frac{q'}{q'-1}$). В этом случае

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{pq}} dm(x) = \omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{pq'}{q'-1}-1} dt \leq \\ & \leq \omega_{n-1} \int_0^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{pq'}{q'-1}-1} dt = \frac{\omega_{n-1}}{n-\frac{pq'}{q'-1}} \varepsilon_0^{n-\frac{pq'}{q'-1}}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\frac{1}{I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^p} dm(x) \leq \|Q\|_{L^{q'}(G)} \left(\frac{\omega_{n-1}}{n - \frac{pq'}{q'-1}} \varepsilon_0^{n - \frac{pq'}{q'-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-p},$$

что также влечёт выполнение соотношения (10). Таким образом, необходимое утверждение вытекает из леммы 1. \square

5. Заключительные замечания Легко построить пример последовательности открытых дискретных отображений, не удовлетворяющих соотношениям вида (6), сходящихся к отображению, не являющемуся нульмерным. Скажем, при $n = 2$ достаточно положить $f_m(z) = x + iy/m$, $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что указанная последовательность удовлетворяет соотношению

$$M(\Gamma) \leq m \cdot M(f(\Gamma)),$$

так как $K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^2}{J(x, f)} = m$, и, значит, постоянная K в (3) равна m . Данная последовательность сходится к отображению $f(z) = x$, не являющемуся нульмерным, причиной чего является отсутствие общей «мажоранты» в (3). В работе [29] исследован вопрос о сходимости гомеоморфизмов, удовлетворяющих «обратным» к (6) неравенствам; здесь для гомеоморфности предельного отображения достаточно только локальной интегрируемости функций Q в (6). Можно ли условия 1)–3) в теореме 1 заменить на условие локальной интегрируемости функции функции Q , либо эти условия являются точными в некотором смысле, нам неизвестно.

Список литературы

- [1] Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестник. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319–342.
- [2] Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O. and Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
- [3] Cristea M. Open discrete mappings having local ACL^n inverses // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – **55**, no. 1–3. – P. 61–90.
- [4] Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.
- [5] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
- [6] Iwaniec T. and Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.
- [7] Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск, Наука, 1982.
- [8] Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1–40.

- [9] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1–13.
- [10] *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [11] *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
- [12] *Смолова Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – **62**, № 5. – С. 682–689.
- [13] *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. **229**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [14] *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Математические труды. – 2002. – **5**, № 2. – С. 91–136.
- [15] *Vodopyanov S. K.* Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups, in book "The Interaction of Analysis and Geometry Contemporary Mathematics, AMS, **424**, 2007, P. 303–344.
- [16] *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Пространства Соболева и специальные классы отображений. – Новосибирск, НГУ, 1981.
- [17] *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщёнными производными // Успехи матем. наук. – 1979. – **34**, № 1. – С. 17–65.
- [18] *Vodop'yanov S. K., Greshnov A. V.* Analytic properties of quasiconformal mappings on Carnot groups // Siberian Mathematical Journal. – 1995. – **36**, no. 6. – P. 1142–1151.
- [19] *Исангулова Д. В.* Класс отображений с ограниченным удельным колебанием и интегрируемость отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журнал. – 2007. – **48**, № 2. – С. 313–334.
- [20] *Markina I.* Singularities of quasiregular mappings on Carnot groups // Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.). – 2005. – **11**. – P. 69–81.
- [21] *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. матем. ж. – 1998. – **39**, № 4. – С. 665–682.
- [22] *Севостьянов Е. А.* Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1128–1134.
- [23] *Hurewicz W. and Wallman H.* Dimension Theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. – 165 p.
- [24] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.

- [25] *Adamowicz T. and Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609–626.
- [26] *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n -space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1970. – **484**. – P. 1–50.
- [27] *Titus C.J. and Young G.S.* The extension of interiority with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 329–340.
- [28] *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
- [29] *Ryazanov V.I., Salimov R.R. and Sevost'yanov E.A.* On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – **23**, no. 4. – P. 263–293.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов

Житомирский государственный университет им. И. Франко

кафедра математического анализа, ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru